Ueber die

mehrfachen Bilder ebener Glasspiegel.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Fakultät zu Marburg

eingereicht von

Eugen Höhnemann
aus Berlin.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1884.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0086

Seinem Grossvater

A. SCHOLZ

als Zeichen der Liebe und Dankbarkeit

gewidmet vom

Verfasser.

Einleitung.

Wenn von einem hellen Lichtpunkte Strahlen, die an einem Glasspiegel mit spiegelnder Rückfläche reflectirt sind, in das Auge eines Beobachters gelangen, so gewahrt dieser im Allgemeinen nicht ein Bild, sondern eine ganze Reihe von Bildern der Lichtquelle. Das erste derselben wird durch Strahlen erzeugt, welche einmal an der Vorderfläche reflectirt sind, das zweite durch einmal an der Hinterfläche reflectirte Strahlen, das dritte durch einmal an der Hinterfläche, dann an der Vorderfläche, schliesslich nochmals an der Hinterfläche des Spiegels reflectirte Strahlen u. s. w. Wenn der Spiegel aus einer unbelegten Glasplatte besteht, so nehmen die Helligkeiten der Bilder von dem durch einmalige Reflexion an der Vorderfläche entstehenden an regelmässig ab. Ist dagegen die Hinterfläche des Spiegels mit einer Belegung versehen, so ist die Helligkeitsabnahme erst vom zweiten Bilde an gleichmässig, während das zweite Bild selbst heller als das erste ist. Die gegenseitige Lage der Bilder ändert sich mit dem Winkel, unter dem man gegen den Spiegel hin sieht, in vielen Fällen aber auch, wenn die Entfernung der Lichtquelle vom Spiegel bei gleich bleibendem Einfallswinkel der Lichtstrahlen geändert wird. Ist letzteres der Fall, so lässt sich stets die Erscheinung beobachten, dass bei einer Drehung des Spiegels um eine Senkrechte auf die Spiegelvorderfläche nur das durch Reflexion an dieser Fläche erzeugte Bild seine Stellung behält und alle übrigen Bilder sich unter Veränderung ihrer gegenseitigen Entfernungen um dasselbe drehen. Diese Thatsache ist zuerst von Stratingh (Poggend. Ann. Bd. 122) erwähnt, die Erklärung derselben ist von Bermann (Poggend. Ann. Bd. 127) gegeben. Meistentheils sind nämlich die Spiegelebenen nicht einander parallel, sondern schliessen einen wenn auch noch so kleinen Winkel ein, welcher die einfachen bei einem planparallelen Spiegel eintretenden Verhältnisse, auf welche bereits von Moutier (Bull. Soc. Philom. Bd. 6 1881/82) näher eingegangen worden ist, wesentlich modificirt. Auf eine mathematische Behandlung, welche gerade hier zum Verständniss der einzelnen Erscheinungen unerlässlich ist, hat man bisher verzichtet, weil sehr complicirte Rechnungen schliesslich zu Gleichungen führen, aus denen man unmöglich Resultate ziehen kann. Indessen weist die Kleinheit des von den Spiegelebenen eingeschlossenen Neigungswinkels auf eine Vernachlässigung verschwindend kleiner Glieder hin und ermöglicht es so, das Problem der mehrfachen Bilder eines Glasspiegels, zwar nicht durchaus genau, aber doch in befriedigender Übereinstimmung mit den Thatsachen mathematisch zu lösen. Es ist klar, dass man dann auch umkehrt von der Lage der Bilder auf die Gestalt eines Glasspiegels oder überhaupt einer Glasplatte schliessen und leicht eine Methode finden kann, den Neigungswinkel der Begrenzungsflächen zu bestimmen.

I.

Die hier zu behandelnde Aufgabe lässt sich etwa folgendermassen aussprechen:

Von einem leuchtenden Punkte fallen Lichtstrahlen auf einen Spiegel, dessen spiegelnde Ebenen unter einem sehr kleinem Winkel gegen einander geneigt sind. Diese Strahlen werden zum Theil nur an der Vorderfläche reflectirt, zum Theil dringen sie in das Innere des Spiegels ein und gelangen nach mehrmaliger Reflexion an den spiegelnden Flächen in das Medium, worin sich die Lichtquelle befindet, zurück. Jedes Strahlenbündel, welches aus gleich oft gebrochenen und reflectirten Strahlen besteht und in das Auge eines Beobachters fällt, liefert diesem ein virtuelles Bild, dessen Ort durch den Durchschnittspunkt der verlängerten sehr nahen Strahlen gegeben ist. Es fragt sich nun, welches ist die Lage der Bilder und welche Veränderungen treten ein, wenn der Spiegel um eine Normale auf seine Vorderfläche gedreht wird?

Um die Untersuchungen zunächst möglichst allgemein zu gestalten, da die sich ergebenden Formeln auch für andere Arbeiten von Nutzen sein dürften, wählen wir ein rechtwinkliges XYZ-Coordinatensystem, welches nur der Bedingung unterworfen sein soll, dass sein Coordinatenursprung 0 auf der Vorderfläche des Spiegels liegt. Es sei d der Abstand der Hinterfläche vom Punkte 0, $a\,b\,c$ seien die Richtungscosinus der Normalen auf die Hinterfläche, ABC die Richtungscosinus der Normalen auf die Vorderfläche des Spiegels. Sind nun xyz die laufenden Coordinaten, so ist:

(1) $$Ax + By + Cz = 0$$

worin $$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

die Gleichung der Vorderfläche,

(2) $$ax + by + cz + d = 0,$$

worin $$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

die Gleichung der Hinterfläche des Spiegels. Zwischen ABC, abc und dem Neigungswinkel Θ der beiden Spiegelflächen findet die Relation statt.

(3) $$Aa + Bb + Cc = cos\Theta$$

II.

Bevor wir den Verlauf eines Lichtstrahls von der Lichtquelle aus durch den Spiegel bis zum beobachtenden Auge verfolgen, wollen wir zwei Hilfssätze anführen, die im Folgenden öfter ihre Anwendung finden werden:

I. »Wenn ein Lichtstrahl, der mit einer beliebigen Geraden G den Winkel α bildet, an einer Fläche gebrochen wird, deren Normale im Einfallspunkte mit ihm den (spitzen) Winkel i und mit der Geraden G den Winkel γ macht und der Brechungsindex für den

Übergang aus dem ersten in das zweite Mittel n ist, so wird der von dem gebrochenen Strahl mit G gebildete Winkel β bestimmt durch die Gleichung:

$$\cos\beta = \frac{\cos\beta}{n} + \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i}{n} \cos\gamma \text{ *).«}$$

II. Wenn zwei Ebenen E_1 und E_2 unter dem Winkel Θ gegen einander geneigt sind, und es gehen von einem Punkte P_1 der Ebene E_1 Lichtstrahlen aus, die abwechselnd an beiden Ebenen reflectirt werden, so liegen die Vereinigungspunkte aller gleich oft reflectirten Strahlen auf demjenigen Kreise, dessen Ebene durch P_1 geht und auf E_1 und E_2 senkrecht steht, dessen Mittelpunkt M der Durchschnitt der Kreisebene mit der den Ebenen E_1 und E_2 gemeinschaftlichen Geraden und dessen Radius MP_1 ist. Bezeichnet man den Vereinigungspunkt $m$mal an der Ebene E_2 reflectirter Strahlen mit P_m, so ist Winkel $P_1MP_m = 2m\Theta$. Sind mit den m Reflexionen an E_2 $m-1$ Reflexionen an E_1 verbunden, so ist dieser Winkel von MP_1 aus in dem Sinne zu nehmen, in welchem die Ebene E_1 bei einer Drehung um die gemeinschaftliche Gerade auf dem kürzesten Wege in die Ebene E_2 übergeführt wird. Bei m Reflexionen an E_1 ist der Winkel $P_1MP_m = 2m\Theta$ in entgegengesetztem Sinne zu nehmen.

Mit Hilfe dieser Sätze ist der Verlauf eines Lichtstrahls, der mit den Richtungscosinus $\lambda_0\ \mu_0\ \nu_0$ von P_0 ausgeht, zu bestimmen. Nach den gemachten Annahmen sind die Gleichungen des Strahls zwischen Lichtquelle und Spiegel:

$$\frac{x_0 - x}{\lambda_0} = \frac{y_0 - y}{\mu_0} = \frac{z_0 - z}{\nu_0} \tag{4}$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (1) ergeben sich hieraus die Coordinaten $x_1y_1z_1$ des Punktes P_1, in welchem der Strahl in den Spiegel eintritt:

$$x_1 = x_0 - \frac{\lambda_0}{\Delta_0} p_0, \quad y_1 = y_0 - \frac{\mu_0}{\Delta_0} p_0, \quad z_1 = z_0 - \frac{\nu_0}{\Delta_0} p_0,$$

worin zur Abkürzung

$$\Delta_0 = A\lambda_0 + B\mu_0 + C\nu_0 \text{ und } p_0 = Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 \text{ gesetzt sind.}$$

Da wir noch öfter auf Ausdrücke wie die durch Δ_0 und p_0 dargestellten kommen werden, so wollen wir ein für allemal folgende Abkürzungen einführen:

$$\Delta = A\lambda + B\mu + C\nu, \quad \delta = a\lambda + b\mu + c\nu$$
$$p = Ax + By + Cz, \quad q = ax + by + cz + d$$

und festsetzen, dass Δ, δ, p und q stets diejenigen Indices erhalten, welche den betreffenden $\lambda\mu\nu$, xyz zukommen. Die Bedeutungen dieser Ausdrücke sind ohne Weiteres einleuchtend.

Die Richtungsrosinus $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1$ des an der Spiegelvorderfläche gebrochenen Strahls werden aus Hilfssatz I. erhalten, indem man nacheinander die drei Coordinatenaxen als die darin vorkommende Gerade G annimmt:

---

*) cfr. Feussner, Ueber die Theorie der Interferenzerscheinungen dünner Blättchen. — Sitzungsberichte d. G. z. Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg Nro. 1. 1880.

$$(6)\qquad \left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{n}(\lambda_0 + A\omega_0 - A\Delta_0) \\ \mu_1 &= \frac{1}{n}(\mu_0 + B\omega_0 - B\Delta_0) \\ \nu_1 &= \frac{1}{n}(\nu_0 + C\omega_0 - C\Delta_0) \\ \text{worin}\quad \omega_0 &= \sqrt{n^2 - 1 + \Delta_0^2} \end{aligned}\right\}$$

und n der Brechungsindex des Glases in Bezug auf das den Spiegel umgebende optische Medium ist. Dem durch die Gleichung (5) bestimmten Punkt P_1 der Vorderfläche entspricht ein Punkt P_m desselben Strahls, der als (virtueller) Vereinigungspunkt aller von P_1 ausgehenden m mal an der Hinterfläche und $m-1$ mal an der Vorderfläche des Spiegels reflectirten Strahlen durch Hilfssatz II. ermittelt werden kann, indem die Vorderfläche als Ebene E_1, die Hinterfläche als Ebene E_2 angenommen wird. Es sind zunächst die Gleichungen der in jenem Satze erwähnten Radien MP_1 und MP_m zu ermitteln. Sind $\pi_1\ \chi_1\ \varrho_1$ die Richtungscosinus von MP_1 so sind die Bedingnngen dafür, dass MP_1 in der Spiegelvorderfläche liegt und mit der Hinterfläche den Neigungswinkel Θ bildet:

$$\begin{aligned} A\pi_1 + B\chi_1 + C\varrho_1 &= 0 \\ a\pi_1 + b\chi_1 + c\varrho_1 &= \sin\Theta \\ \pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2 &= 1, \end{aligned}$$

und man erhält also

$$\pi_1 = \frac{A\cos\Theta - a}{\sin\Theta},\quad \chi_1 = \frac{B\cos\Theta - b}{\sin\Theta},\quad \varrho_1 = \frac{C\cos\Theta - c}{\sin\Theta}$$

Um weiter die Richtungsrosinus $\pi_m\ \chi_m\ \varrho_m$ des Radius MP_m zu bestimmen, bedienen wir uns folgender drei Gleichungen:

$$\pi\pi_m + \chi\chi_m + \varrho\varrho_m = \cos 2m\Theta$$

$$\begin{vmatrix} \pi_m & \chi_m & \varrho_m \\ A & B & C \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2 = 1$$

Die erste derselben sagt aus, dass (nach Satz II.) Winkel $P_1MP_m = 2m\Theta$ ist, die zweite, dass MP_m in einer auf den Spiegelflächen senkrechten Ebene liegt. Daraus folgt:

$$\pi_m = -\frac{A\cos(2m-1)\Theta - a\cos 2m\Theta}{\sin\Theta}$$

$$\chi_m = -\frac{B\cos(2m-1)\Theta - b\cos 2m\Theta}{\sin\Theta}$$

$$\varrho_m = -\frac{C\cos(2m-1)\Theta - c\cos 2m\Theta}{\sin\Theta}$$

Der Radius MP_1 ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem die eine Kathete als der senkrechte Abstand q_1 des Punktes P_1 von der Spiegelhinterfläche

und der dieser Kathete gegenüberliegende Winkel Θ bekannt sind. Mithin ist $MP_1 = MP_m = \frac{q_1}{sin\Theta}$, woraus wir sogleich die Coordinaten $x_m\ y_m\ z_m$ des Punktes P_m erhalten. Es ist nämlich:

$$x_m = x_1 + MP_1\,\pi_1 + MP_m\pi_m$$
$$= x_1 + 2\,\frac{sin\,m\Theta}{sin^2\Theta}\left(A\,sin\,(m-1)\Theta - a\,sin\,m\Theta\right)q_1$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir y_m und z_m und gelangen zu den Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} x_m = x_1 + 2\,\frac{sin\,m\Theta}{sin^2\Theta}\left(A\,sin\,(m-1)\Theta - a\,sin\,m\Theta\right)q_1 \\ y_m = y_1 + 2\,\frac{sin\,m\Theta}{sin^2\Theta}\left(B\,sin\,(m-1)\Theta - b\,sin\,m\Theta\right)q_1 \\ z_m = z_1 + 2\,\frac{sin\,m\Theta}{sin^2\Theta}\left(C\,sin\,(m-1) - \Theta\,c\,sin\,m\Theta\right)q_1 \end{cases}$$

Um nun die Coordinaten $x'_m\ y'_m\ z'_m$ des Punktes P'_m zu berechnen, in welchem sich alle von einem Punkte P'_1 der Hinterfläche des Spiegels ausgehenden, $m-1$ mal an der Vorderfläche, $m-1$ mal an der Hinterfläche reflectirten Strahlen schneiden, bedienen wir uns ebenfalls des Hilfssatzes II., indem wir die Hinterfläche als Ebene E_1, die Vorderfläche als Ebene E_2 annehmen. Dann sind die Richtungscosinus des Radius $M'P'_1$ in der Hinterfläche:

$$\pi'_1 = \frac{A - a\,cos\,\Theta}{sin\,\Theta},\quad \chi'_1 = \frac{B - b\,cos\,\Theta}{sin\,\Theta},\quad \varrho'_1 = \frac{C - c\,cos\,\Theta}{sin\,\Theta},$$

folglich die Richtungscosinus des Radius $M'P'_m$:

$$\pi'_m = \frac{A\,cos\,2(m-1)\Theta - a\,cos\,(2m-1)\Theta}{sin\Theta}$$
$$\chi'_m = \frac{B\,cos\,2(m-1)\Theta - b\,cos\,(2m-1)\Theta}{sin\Theta}$$
$$\varrho'_m = \frac{C\,cos\,2(m-1)\Theta - c\,cos\,(2m-1)\Theta}{sin\Theta}$$

und schliesslich, weil $M'P' = M'P'_m = \frac{p'_1}{sin\Theta}$, die Coordinaten des Punktes P'_m:

$$(8)\qquad \begin{cases} x'_m = x'_1 - 2\,\frac{sin\,(m-1)\Theta}{sin^2\Theta}\left(A\,sin\,(m-1)\Theta - a\,sin\,m\Theta\right)p'_1 \\ y'_m = y'_1 - 2\,\frac{sin\,(m-1)\Theta}{sin^2\Theta}\left(B\,sin\,(m-1)\Theta - b\,sin\,m\Theta\right)p'_1 \\ z'_m = z'_1 - 2\,\frac{sin\,(m-1)\Theta}{sin^2\Theta}\left(C\,sin\,(m-1)\Theta - c\,sin\,m\Theta\right)p'_1 \end{cases}$$

Wir wissen jetzt: jeder Strahl, der durch Punkt P_1 geht, geht nach m Reflexionen an der Vorderfläche des Spiegels durch Punkt P_m; auf jedem Strahl, der durch Punkt P'_1 geht, liegt nach $m-1$ Reflexionen an der Vorderfläche und $m-1$ Reflexionen an

der Hinterfläche Punkt P_m'. Sind also P_1 und P_1' Punkte eines und desselben Strahls, so sind P_m und P_m' Punkte des m mal an der Hinterfläche, $m-1$ mal an der Vorderfläche reflectirten Strahls. Die Richtungscosinus $\lambda_m\ \mu_m\ \nu_m$ dieses im Ganzen $2m-1$ mal reflectirten Strahls genügen also den Gleichungen:

$$(9)\qquad \lambda_m = \frac{x_m - x_m'}{W_m},\ \mu_m = \frac{y_m - y_m'}{W_m},\ \nu_m = \frac{z_m - z_m'}{W_m},$$

$$\text{wo}\quad W_m = \sqrt{(x_m - x_m')^2 + (y_m - y_m')^2 + (z_m - z_m')^2}$$

Sind nun $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1$ die Richtungscosinus der Geraden P_1P_1' und also ihre Gleichungen

$$\frac{x_1 - x}{\lambda_1} = \frac{y_1 - y}{\mu_1} = \frac{z_1 - z}{\nu_1}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (2)

$$(10)\qquad x_1' = x_1 - \frac{\lambda_1}{\delta_1} q_1,\ y_1' = y_1 - \frac{\mu_1}{\delta_1} q_1,\ z_1' = z_1 - \frac{\nu_1}{\delta_1} q_1,$$

so erhalten wir, indem wir diese und die durch (7) und (8) bestimmten Werthe in Gleichung (9) einsetzen, nach einigen Umformungen die Richtungscosinus $\lambda_m\ \mu_m\ \nu_m$:

$$(11)\qquad \begin{cases} \lambda_m = \lambda_1 - 2\,\dfrac{\delta_1 \sin m\Theta - \Delta_1 \sin(m-1)\Theta}{\sin^2\Theta}\left(a \sin m\Theta - A \sin(m-1)\Theta\right) \\ \mu_m = \mu_1 - 2\,\dfrac{\delta_1 \sin m\Theta - \Delta_1 \sin(m-1)\Theta}{\sin^2\Theta}\left(b \sin m\Theta - B \sin(m-1)\Theta\right) \\ \nu_m = \nu_1 - 2\,\dfrac{\delta_1 \sin m\Theta - \Delta_1 \sin(m-1)\Theta}{\sin^2\Theta}\left(c \sin m\Theta - C \sin(m-1)\Theta\right) \end{cases}$$

Durch die Gleichungen (5), (6), (7) uud (11) ist der Weg von der Hinterfläche zur Vorderfläche, welchen ein beliebiger von P_0 ausgehender Lichtstrahl nach einer Anzahl von Reflexionen im Innern des Spiegels durchläuft, vollständig bestimmt. Es bleibt noch übrig, die Gleichungen des aus dem Spiegel getretenen Strahls aufzustellen. Die Richtungscosinus $\lambda'\ \mu'\ \nu'$ desselben ergeben sich aus $\lambda_m\ \mu_m\ \nu_m$ durch Anwendung von Hilfssatz I., indem darin für n sein reciproker Werth $\frac{1}{n}$ gesetzt wird und nacheinander die drei Coordinatenaxen als die darin vorkommende Gerade G angenommen werden. Die so erhaltenen Formeln:

$$\lambda' = n(\lambda_m + A\sqrt{1 - n^2 + n^2\Delta_m^2} - A\Delta_m)$$
$$\mu' = n(\mu_m + B\sqrt{1 - n^2 + n^2\Delta_m^2} - B\Delta_m)$$
$$\nu' = n(\nu_m + C\sqrt{1 - n^2 + n^2\Delta_m^2} - C\Delta_m)$$

gehen bei Benutzung von (6) und (11) über in:

$$(12)\qquad \begin{cases} \lambda' = \lambda_0 - A\Delta_0 + 2\,\dfrac{\sin m\Theta}{\sin^2\Theta}\,k\,(A\cos\Theta - a) - AW \\ \mu' = \mu_0 - B\Delta_0 + 2\,\dfrac{\sin m\Theta}{\sin^2\Theta}\,k\,(B\cos\Theta - b) - BW \\ \nu' = \nu_0 - C\Delta_0 + 2\,\dfrac{\sin m\Theta}{\sin^2\Theta}\,k\,(C\cos\Theta - c) - CW \end{cases}$$

In diesen Formeln sind folgende Abkürzungen angewandt:

$$(13)\qquad \begin{cases} k = (\delta_0 - \Delta_0 \cos\Theta)\sin m\Theta + w_0 \sin\Theta \,.\, \cos m\Theta \\ K = (\delta_0 - \Delta_0 \cos\Theta)\sin 2m\Theta + w_0 \sin\Theta \,.\, \cos 2m\Theta \\ W = \sqrt{1 - n^2 + \frac{K^2}{\sin^2\Theta}} \end{cases}$$

Combiniren wir schliesslich die Gleichungen des betrachteten Wegstücks von der Hinterfläche zur Vorderfläche des Spiegels, nämlich:

$$\frac{x_m - x}{\lambda_m} = \frac{y_m - y}{\mu_m} = \frac{z_m - z}{\nu_m},$$

mit der Gleichung der Vorderfläche, so ergeben sich für die Coordinaten $x'\ y'\ z'$ des Punktes, in welchem der Lichtstrahl aus dem Spiegel austritt, nachdem die Richtungscosinus $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1$ durch die ursprünglichen $\lambda_0\ \mu_0\ \nu_0$ mit Hilfe von Gl. (6) ersetzt sind, wie folgt:

$$(14)\qquad \begin{cases} x' = x_0 - \frac{\lambda_0}{\Delta_0} p_0 - \frac{1}{K}\Big[(\lambda_0 + Aw_0 - A\Delta_0)\sin 2m\Theta + 2\frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} w_0\big(A\sin(m-1)\Theta - a\sin m\Theta\big)\Big](q_0 - \frac{\delta_0}{\Delta_0} p_0) \\ y' = y_0 - \frac{\mu_0}{\Delta_0} p_0 - \frac{1}{K}\Big[(\mu_0 + Bw_0 - B\Delta_0)\sin 2m\Theta + 2\frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} w_0\big(B\sin(m-1)\Theta - b\sin m\Theta\big)\Big](q_0 - \frac{\delta_0}{\Delta_0} p_0) \\ z' = z_0 - \frac{\nu_0}{\Delta_0} p_0 - \frac{1}{K}\Big[(\nu_0 + Cw_0 - C\Delta_0)\sin 2m\Theta + 2\frac{\sin m\Theta}{\sin\Theta} w_0\big(C\sin(m-1)\Theta - c\sin m\Theta\big)\Big](q_0 - \frac{\delta_0}{\Delta_0} p_0) \end{cases}$$

Die Gleichung des aus dem Spiegel getretenen Lichtstrahls ist also;

$$\frac{x' - x}{\lambda'} = \frac{y' - y}{\mu'} = \frac{z' - z}{\nu'},$$

wo $x'\ y'\ z'$, $\lambda'\ \mu'\ \nu'$ Funktionen der Variabeln $\lambda_0\ \mu_0\ \nu_0$ sind.

III.

Um die weiteren Formeln nicht zu complicirt zu gestalten, wollen wir von jetzt an die Beschränkung einführen, dass die YZ-Ebene des gewählten Coordinatensystems mit der Vorderfläche des Spiegels zusammenfällt. Weiter sollen die Richtungscosinus $a\ b\ c$ der Normalen auf die Hinterfläche durch Θ und den Winkel f ausgedrückt werden, welchen die Neigungsebene des Winkels Θ mit der Y-Axe bildet, und zwar mag derselbe positiv gerechnet werden im Sinne einer Drehung um die X-Axe, wodurch die positive Y-Axe auf dem kürzesten Wege in die positive Z-Axe übergeführt wird. Nach diesen Annahmen ist:

$$(15)\qquad \begin{cases} A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \\ a = \cos\Theta, \quad b = \sin\Theta \,.\, \cos f, \quad c = \sin\Theta \,.\, \sin f \\ \Delta_0 = \lambda_0 \qquad \delta_0 = \lambda_0 \cos\Theta + (\mu_0 \cos f + \nu_0 \sin f)\sin\Theta \end{cases}$$

Die Gleichungen (12) nehmen also folgende Gestalt an:

$$(16)\qquad \begin{cases} \lambda' = -W_1 \\ \mu' = \mu_0 - 2\sin m\Theta . k_1 \cos f \\ \nu' = \nu_0 - 2\sin m\Theta . k_1 \sin f \end{cases}$$

wo

$$(17)\qquad \begin{cases} k_1 = (\mu_0 \cos f + \nu_0 \sin f)\sin m\Theta + w_0 \cos m\Theta \\ K_1 = (\mu_0 \cos f + \nu_0 \sin f)\sin 2m\Theta + w_0 \cos 2m\Theta \\ W_1 = \sqrt{1 - n^2 + K_1^2} \end{cases}$$

Die Gleichnngen (14) gehen über in:

$$(18)\qquad \begin{cases} x' = 0 \\ y' = y_0 - \dfrac{\mu_0}{\lambda_0} x_0 \\ -\dfrac{1}{K_1}\left(\mu_0 \sin 2m\Theta - 2\sin^2 m\Theta . \cos f . w_0\right)\left(y_0 \cos f + z_0 \sin f + \dfrac{d}{\sin\Theta} - \dfrac{\mu_0 \cos f + \nu_0 \sin f}{\lambda_0} x_0\right) \\ z' = z_0 - \dfrac{\nu_0}{\lambda_0} x_0 \\ -\dfrac{1}{K_1}\left(\nu_0 \sin 2m\Theta - 2\sin^2 m\Theta . \sin f . w_0\right)\left(y_0 \cos f + z_0 \sin f + \dfrac{d}{\sin\Theta} - \dfrac{\mu_0 \cos f + \nu_0 \sin f}{\lambda_0} x_0\right) \end{cases}$$

Alle hier abgeleiteten Werthe sind Funktionen der drei Variabeln λ_0 μ_0 ν_0. Da aber eine derselben durch die Gleichung $\lambda_0^2 + \mu_0^2 + \nu_0^2 = 1$ von den beiden andern abhängig ist, so wollen wir aus Gründen der Symmetrie die beiden letzteren als unabhängige Variabeln betrachten. Gelangt der mit den Richtungscosinus λ_0 μ_0 ν_0 ausgehende Lichtstrahl in ein Auge, dessen Pupille als sehr kleiner Kreis gedacht ist, so wird er mit den benachbarten Strahlen ein Bild liefern, dass sich im Durchschnittspunkte dieser Strahlen befindet. Jeder Strahl wird aber, wie Kummer (Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. Borchardt, Journal f. reine u. angewandte Mathematik. Bd. 57) nachgewiesen hat, von seinen benachbarten Strahlen in zwei Punkten, den »Brennpunkten« des Strahls, geschnitten. Die Querschnitte des Strahlenbündels in den Brennpunkten sind sehr kleine gerade Linien, die auf einander senkrecht stehen und im Allgemeinen klein von derselben Ordnung wie der Radius der Pupille sind. Nur unter besonderen Umständen sind sie klein von höherer Ordnung. Jedenfalls dürfen wir annehmen, dass ein beobachtendes Auge das Bild in einen der so ausgezeichneten Punkte versetzt, vielleicht es wohl auch in einem zwischen beiden befindlichen Punkt verlegt*).

*) In der Zeischrift f. Mathem. u. Phys, v. Prof. Schlömilch, Jahrg. 1863 findet sich eine Arbeit von Bermann: »Ueber den scheinbaren Ort der unter Wasser befindlichen Objecte«, worin nachgewiesen wird, dass man im Wasser nur ein Bild wahrnimmt, weil die Dichtigkeit des Strahlenbündels in dem einen Brennpunkte verschwindend klein gegen die Dichtigkeit im andern Brennpunkte ist. Vallée hat in seiner »Théorie de l'oeil« (1845) nachgewiesen, dass die beiden Bilder durch eine Loupe sichtbar gemacht werden können. Wir wollen nicht allgemein untersuchen, welcher von beiden Brennpunkten hier das Bild liefert, einmal, weil die Dichtigkeiten in den Brennpunkten nicht, wie in dem von Bermann behandelten Falle, stets um unendlich viel verschieden sind, so dass wir nicht ohne Weiteres behaupten können, der eine von ihnen verschwinde gegen den andern.

Um die Lage der Brennpunkte des durch die Gleichungen (16), (17) und (18) gegebenen Strahls zu bestimmen, schliessen wir uns der citirten Abhandlung von Kummer an und wählen als Ausgangspunkt, d. h. als den Punkt, in welchem wir den Uebergang von dem gegebenen zu einem unendlich nahe benachbarten Strahl vollziehen, den Punkt $x' \; y' \; z'$, in welchem der Strahl den Spiegel verlässt.

Weiter führen wir im Anschluss an Kummer folgende Bezeichnungen ein:

19)
$$\begin{cases} e = \dfrac{\partial y'}{\partial \mu_0} \cdot \dfrac{\partial \mu'}{\partial \mu_0} + \dfrac{\partial z'}{\partial \mu_0} \cdot \dfrac{\partial \nu'}{\partial \mu_0} \\ f = \dfrac{\partial y'}{\partial \nu_0} \cdot \dfrac{\partial \mu'}{\partial \mu_0} + \dfrac{\partial z'}{\partial \nu_0} \cdot \dfrac{\partial \nu'}{\partial \mu_0} \\ f' = \dfrac{\partial y'}{\partial \mu_0} \cdot \dfrac{\partial \mu'}{\partial \nu_0} + \dfrac{\partial z'}{\partial \mu_0} \cdot \dfrac{\partial \nu'}{\partial \nu_0} \\ g = \dfrac{\partial y'}{\partial \nu_0} \cdot \dfrac{\partial \mu'}{\partial \nu_0} + \dfrac{\partial z'}{\partial \nu_0} \cdot \dfrac{\partial \nu'}{\partial \nu_0} \\ E = \left(\dfrac{\partial \lambda'}{\partial \mu_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \mu'}{\partial \mu_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \nu'}{\partial \nu_0}\right)^2 \\ F = \dfrac{\partial \lambda'}{\partial \mu_0} \cdot \dfrac{\partial \lambda'}{\partial \nu_0} + \dfrac{\partial \mu'}{\partial \mu_0} \cdot \dfrac{\partial \mu'}{\partial \mu_0} + \dfrac{\partial \nu'}{\partial \mu_0} \cdot \dfrac{\partial \nu'}{\partial \nu_0}, \quad \Delta^2 = EG - F^2 \\ G = \left(\dfrac{\partial \lambda'}{\partial \nu_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \mu'}{\partial \nu_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \nu'}{\partial \nu_0}\right)^2 \end{cases}$$

Da alle von dem Punkte $P_0 \, (x_0 \, y_0 \, z_0)$ ausgehenden Strahlen Normale einer Fläche, nämlich einer Kugelfläche sind, so behalten sie die Eigenschaft, Normale einer Fläche zu sein, nach dem Satze von Malus auch nach beliebig vielen Brechungen und Reflexionen. Nach Kummer ist die Bedingung hierfür:

(19a) $$f = f'$$

Mit Benutzung dieser Formeln ergeben sich die Entfernungen ϱ_1 und ϱ_2 der Brennpunkte vom Punkte $(x' \; y' \; z')$ aus den Gleichungen:

(20)
$$\begin{cases} \varrho_1 + \varrho_2 = -\dfrac{eG - 2fF + gE}{\Delta^2} \\ \varrho_1 \, \varrho_2 = \dfrac{eg - f^2}{\Delta^2} \end{cases}$$

Die Lage der Brennpunkte ist durchaus keine andere, wenn als Ausgangspunkt im obigen Sinne die Pupille gewählt wird. Um dies nachzuweisen, sei

$$ax + by + cz + \mathfrak{p} = 0$$

die Gleichung der Ebene, in welcher sich die Pupille befindet. $\xi \, \eta \, \zeta$ seien die Coordinaten des Centrums der Pupille, durch welchen der betrachtete Strahl geht, nachdem er den Spiegel verlassen hat. Aus den Gleichungen des Strahls:

Andererseits können hier wie bei der Durchstrahlung jedes prismatischen Körpers, die ins Auge gelangenden Strahlen im Allgemeinen nicht als homocentrisch in den Brennpunkten angesehen werden; die Bilder sind also verschwommen, und eine genaue Beurtheilung ihrer Entfernung ist nicht wohl möglich, zumal da die Brennpunkte hier nahe bei einander liegen.

$$\frac{-x}{\lambda'} = \frac{y'-y}{\mu} = \frac{z'-z}{\nu'}$$

und der Gleichung der Pupillenebene ergeben sich, wenn wir für die laufenden Coordinaten $x\ y\ z$ die des Centrums der Pupille $\xi\ \eta\ \zeta$ setzen:

$$\xi = -\frac{\lambda'}{a\lambda' + b\mu' + c\nu'}(by' + cz' + p)$$

$$\mu = -\frac{\mu'}{a\lambda' + b\mu' + c\nu'}(bx' + cz' + p)$$

$$\zeta = -\frac{\nu'}{a\lambda' + b\mu' + c\nu'}(by' + cz' + p)$$

Differentiirt man nun diese Gleichungen partiell nach μ_0 und ν_0 und bildet für die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial\xi}{\partial\mu_0},\quad \frac{\partial\eta}{\partial\mu_0},\quad \frac{\partial\xi}{\partial\mu_0};\quad \frac{\partial\xi}{\partial\nu_0},\quad \frac{\partial\eta}{\partial\nu_0},\quad \frac{\partial\xi}{\partial\nu_0}$$

die den Gleichungen (19) entsprechenden Werthe $e_1\ f_1\ f_1'\ g_1$, so erhält man schliesslich:

$$e_1 = e - E\frac{by' + cz' + p}{a\lambda' + b\mu' + c\nu'}$$

$$f_1 = f_1' = f - F\frac{by' + cz' + p}{a\lambda' + b\mu' + c\nu'}$$

$$g_1 = g - G\frac{by' + cz' + p}{a\lambda' + b\mu' + c\nu'}$$

Es sind also nach (20) die Entfernungen ϱ_1' und ϱ_2' die Brennpunkte vom Centrum der Pupille bestimmt durch die Gleichungen

$$\varrho_1' + \varrho_2' = \varrho_1 + \varrho_2 + 2\frac{by' + cz' + p}{a\lambda' + b\mu' + c\nu'}$$

$$\varrho_1'\varrho' = \left(\varrho_1 + \frac{by' + cz' + p}{a\lambda' + b\mu' + c\nu'}\right)\left(\varrho_2 + \frac{ay' + bz' + p}{a\lambda' + b\mu' + c\nu'}\right),$$

mithin

$$\varrho_1' - \varrho_1 = \frac{by' + cz' + p}{a\lambda' + b\mu' + c\nu'},\quad \varrho_2' - \varrho_2 = \frac{by' + cz' + p}{a\lambda' + b\mu' + c\nu'}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind, wie leicht einzusehen, die Entfernungen des vorigen Ausgangspunkts vom Mittelpunkt der Pupille. Die Brennpunkte liegen stets hinter dem Spiegel, also auf der Verlängerung des Strahls über den Punkt $(x'\ y'\ z')$ hinaus. Da nun die Entfernung eines jeden Brennpunktes vom Mittelpunkte der Pupille, vermindert um die Entfernung vom Punkte $(x'\ y'\ z')$, gleich dem Abstand dieser beiden Punkte ist, so müssen die bei der ersten Betrachtung erhaltenen Punkte mit den bei der zweiten Betrachtung gefundenen zusammenfallen. Damit ist bewiesen, dass Punkt $(x'\ y'\ z')$ als Ausgangspunkt für die Differentiation angenommen werden darf.

Entwickelt man nun die partiellen Differentialquotienten von $\lambda'\ \mu'\ \nu'$, $x'\ y'\ z'$ nach μ_0 und ν_0 und setzt die erhaltenen Werthe in die Ausdrücke (19) ein, so erhalten diese folgende Form:

$$
(19^a)\quad
\begin{cases}
e = -\dfrac{1-\nu_0^2}{\lambda_0^3}\,x_0 \\
\quad -\dfrac{n^2-\nu^2}{w_0^2}\,\dfrac{sin2m\Theta}{K_1}\left(y_0 cosf + z_0 sinf + \dfrac{d}{sin\Theta} - \dfrac{\mu_0 cosf + \nu_0 sinf}{\lambda_0}\,x_0\right) \\
f = f' = -\dfrac{\mu_0\nu_0}{\lambda_0^3}\,x_0 \\
\quad -\dfrac{\mu_0\nu_0}{w_0^2}\cdot\dfrac{sin2m\Theta}{K_1}\left(y_0 cosf + z_0 sinf + \dfrac{d}{sin\Theta} - \dfrac{\mu_0 cosf + \nu_0 sinf}{\lambda_0}\,x_0\,\mu_0^2\right. \\
g = -\dfrac{1-\mu_0}{\lambda_0^3}\,x_0 \\
\quad -\dfrac{n^2-\mu_0^2}{w_0^2}\cdot\dfrac{sin2m\Theta}{K_1}\left(y_0 cosf + z_0 sinf + \dfrac{d}{sin\Theta} - \dfrac{\mu_0 cosf + \nu_0 sinf}{\lambda_0}\,x_0\right) \\
E = \dfrac{n^2-\nu_0^2}{w_0^2} + \dfrac{n^2-1}{W_1^2 w_0^2}\left(w_0 sin2m\Theta.cosf - \mu_0 cos2m\Theta\right)^2 \\
F = \dfrac{\mu_0\nu_0}{w_0^2} + \dfrac{n^2-1}{W_1^2 w_0^2}\left(w_0 sin2m\Theta.cosf - \mu_0 cos2m\Theta\right)\left(w_0 sin2m\Theta.sinf - \nu_0 cos2m\Theta\right) \\
G = \dfrac{n^2-\mu_0^2}{w_0^2} + \dfrac{n^2-1}{W_1^2 w_0^2}\left(w_0 sin2m\Theta.sinf - \nu_0 cos2m\Theta\right)^2 \\
A^2 = \dfrac{K_1^2}{W_1^2 w_0^2}
\end{cases}
$$

Demnach sind ϱ_1 und ϱ_2 durch folgende Gleichungen gegeben:

$$
(20^a)\quad
\begin{cases}
\varrho_1 + \varrho_2 = r_1 + r_2 + s \\
\varrho_1\varrho_2 = r_1 r_2
\end{cases}
$$

wo

$$
(21)\quad
\begin{cases}
r_1 = \dfrac{W_1^2}{K_1^2}\left(\dfrac{w_0^2}{\lambda_0^3}\,x_0 + n^2 sin2m\Theta\,\dfrac{y_0 cosf + z_0 sinf + \dfrac{d}{sin\Theta} - \dfrac{\mu_0 cosf + \nu_0 sinf}{\lambda_0}\,x_0}{K_1}\right) \\
r_2 = \dfrac{x_0}{\lambda_0} + sin2m\Theta\,\dfrac{y_0 cosf + z_0 sinf + \dfrac{d}{sin\Theta} - \dfrac{\mu_0 cosf + \nu_0 sinf}{\lambda_0}\,x_0}{K_1} \\
s = sin^2 2m\Theta\,\dfrac{(n^2-1)^2}{K_1^2}\cdot\dfrac{(\mu_0 sinf - \nu_0 cosf)^2}{\lambda_0^3}\,x_0
\end{cases}
$$

Mithin ist

$$
(22)\quad
\left.\begin{matrix}\varrho_1 \\ \varrho_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + s) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + \tfrac{\omega}{2}(r_1 + r_2)s + s^2}
$$

Nach den oben in Bezug auf die Brennpunkte gemachten Bestimmungen folgen für die Coordinaten $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{z}$ derselben die Gleichungen:

$$
(23)\quad \mathfrak{x} = \lambda'\varrho\ ,\ \mathfrak{y} = y' + \mu'\varrho\ ,\ \mathfrak{z} = z' + \nu'\varrho
$$

Das bisher erlangte Resultat ist also: Wenn von einem leuchtenden Punkte P ein unendlich dünnes Strahlenbündel, dessen Richtung durch die Richtungcosinus $\lambda_0\ \mu_0\ \nu_0$ gegeben ist, ausgeht und auf die Vorderfläche eines prismatisch gestalteten Spiegels fällt,

im Innern desselben eine beliebige Anzhl $2m-1$von Reflexionen erfährt und dann in das optische Mittel, worin sich die Lichtquelle befindet, zurückgeht, so sind die Brennpunkte dieses Bündels durch die Gleichungen (23) im Allgemeinen bestimmt. Die Aufgabe könnte also ohne Einschränkung gelöst werden, wenn sich aus den Gleichungen (23) die Richtungscosinus $\lambda_0\ \mu_0\ \nu_0$ für jeden beliebigen Werth (1, 2, 3 . . .) von m vermittelst der Bedingung eliminiren liessen, dass jedes einem bestimmten m entsprechende Strahlenbündel in ein Auge gelange, dessen Pupillencentrum fest steht. Es wäre diese Bedienung, wenn $X\ Y\ Z$ die Coordinaten des Centrums der Pupille sind, ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\frac{\xi - X}{\lambda'} = \frac{\eta - Y}{\mu'} = \frac{\zeta - Z}{\nu'}$$

Wir sehen indessen aus der Complicirtheit der entwickelten Funktionen, dass es unmöglich ist, auf diesem Wege übersichtliche Folgerungen ziehen zu können.

IV.

Sollen die erhaltenen Formeln für das vorgelegte Problem benutzt werden, so ist die Annahme eines sehr kleinen Neigungswinkels Θ der Spiegelflächen und einer sehr kleinen Dicke d des Spiegels unerlässlich. Ausserdem muss aber auch die ganze Zahl m unter einer gewissen Grenze bleiben, wenn die folgenden Formeln ihre annähernde Giltigkeit behalten sollen. Diese Voraussetzungen sind durchaus nicht willkürlich, da man ja in der Praxis bemüht ist, möglichst parallelflächige Spiegel herzustellen und andernteils die Zahl der sichtbare Bilder liefernden Reflexionen durch die Absorbtion des Glases und die fortwährende Theilung des Lichts beschränkt ist.

Sieht nun ein Auge das Bild der Lichtquelle P, das nach einer einzigen Reflexion an der Vorderfläche entsteht, so wird das von P ausgehende Strahlenbündel auf seinem Wege von der Lichtquelle zum Spiegel eine ganz bestimmte Richtung haben. (Unter Richtung eines Strahlenbündels verstehe ich die Richtung des durch den Mittelpunkt der feststehenden Pupille des Auges gehenden Strahles). Wir wollen demnach das im Anfang gewählte Coordinatensysten so bestimmen, dass der Coordinatenursprung in den Punkt fällt, in welchem der nach einmaliger Reflexion durch die Mitte der Pupille gehende Strahl die Vorderfläche des Spiegels trifft, dass die X-Axe mit diesem Strahl, bevor er reflectirt ist, zusammenfällt und dass seine Einfallsebene XY-Ebene wird. Ist α der Einfallswinkel des so bestimmten Lichtstrahls, so sind die Richtungscosinus $A\ B\ C$ der Normalen auf die Vorderfläche, bezogen auf das neue Coordinatensystem, gegeben durch die Gleichungen:

$$A = \cos\alpha\ ,\ B = \sin\alpha\ ,\ C = 0 \tag{24}$$

Führen wir zur Bestimmung der Richtungscosinus $a\ b\ c$, die der Normalen auf die Hinterfläche des Spiegels zukommen, den Winkel Θ und den von der Neigungsebene dieses Winkels und der XY-Ebene gebildeten Neigungswinkel f ein, so ist unter Vernachlässigung höherer Potenzen als der 2ten von Θ:

$$(25)\qquad \begin{cases} a = \cos\alpha - \sin\alpha.\cos f.\Theta - \frac{1}{2}\cos\alpha.\Theta^2 \\ b = \sin\alpha + \cos\alpha.\cos f.\Theta - \frac{1}{2}\sin\alpha.\Theta^2 \\ c = \sin f.\Theta \end{cases}$$

Es ist nach den im Anfang dieses Abschnitts gemachten Voraussetzungen klar, dass die Richtungscosinus der dem beobachtenden Auge mehrfache Bilder liefernden von P ausgehenden Strahlenbündel höchstens um sehr kleine Glieder erster Ordnung von denen des einmal reflectirten Strahlenbündels im Allgemeinen abweichen können. Wir dürfen demnach für jedes beliebige m die Grössen μ_0 und ν_0 als sehr klein von der ersten Ordnung annehmen, also die Gleichung

$$\lambda_0 = 1 - \frac{1}{2}(\mu_0^2 + \nu_0^2)$$

unter Vernachlässigung sehr kleiner Grössen 3ter Ordnung einführen.

Somit erhalten wir aus den Gleichungen (12) und (13) die Richtungscosinus jedes beliebigen mehrfache Bilder liefernden Strahlenbündels wie folgt:

$$(26)\qquad \begin{cases} \lambda' = -\cos 2\alpha - \left[\sin 2\alpha.\mu_0 - 4m\sin\alpha.\operatorname{ccs} f.\Theta\right] + \left[\frac{1}{2}\cos 2\alpha(\mu_0^2+\nu_0^2) + \right. \\ \left. + 2m\left(\frac{\sin 2\alpha.\sin\alpha}{w} - \frac{w}{\cos\alpha}\right)\cos f.\mu_0\Theta - 2mw\sin f.\nu_0\Theta + 2m^2\left(w^2 + (\frac{n^2-1}{\cos^2\alpha} - 1)\sin^2\alpha.\cos^2 f\right)\Theta^2\right] \\ \mu' = -\sin 2\alpha + \left[\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}(\cos\alpha.\mu_0 - 2mw\cos f.\Theta)\right] + \\ + \left[\frac{1}{2}\sin 2\alpha(\mu_0^2+\nu_0^2) - 2m\left(\frac{\cos 2\alpha}{w} + \frac{w}{\cos^2\alpha}\right)\sin\alpha.\cos f.\mu_0\Theta - 2mw\,tg\alpha\sin f.\nu_0\Theta + \right. \\ \left. + 2m^2\left(w^2 + \frac{\cos^4\alpha + (n^2-1)\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cos^2 f\right)tg\alpha.\Theta^2\right] \\ \nu' = \left[\nu_0 - 2mw\sin f.\Theta\right] - \left[m\frac{\sin 2\alpha}{w}\sin f.\mu_0\Theta - 2m^2\sin\alpha.\sin f.\cos f\Theta^2\right], \end{cases}$$

worin $w = \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$ ist *).

Setzen wir in den Gleichungen (14) $x_0 = l$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, da die Lichtquelle auf der X-Axe liegt, so ergeben sich die Coordinaten des Austrittspunktes jedes durch den Mittelpunkt der Pupille gehenden Strahls:

$$(27)\qquad \begin{cases} x' = \left[ltg\alpha.\mu - 2m\frac{\sin^2\alpha}{w}d\right] + \left[-ltg^2\alpha.\mu_0^2 + 2m\frac{\sin^2\alpha}{w}(\frac{\cos f}{\cos\alpha}\mu_0 + \sin f.\nu_0)l\Theta + 2m\frac{n^2}{w^3}\sin\alpha.\cos\alpha.\mu_0 d \right. \\ \left. - 2m^2\frac{n^2+\sin^2\alpha}{n_2-\sin^2\alpha}\sin\alpha.\cos f.\Theta d\right] \\ y = -x'\,ctg\alpha \\ z' = -l\nu_0 + \left[ltg\alpha.\mu_0\nu_0 - 2m\frac{d}{w}\nu_0 + 2m^2\sin f.\Theta d\right] \end{cases}$$

*) Anm. Auf anderem Wege gelangte Feussner zu ähnlichen Gleichungen, wie (25), (26), (27); cfr. Feussner, l. c., pag. (7), (10).

Wird nun das Coordinatensystem um die Z-Axe so gedreht, dass die X-Axe den Winkel 2α beschreibt und in der neuen Lage mit dem an der Spiegelvorderfläche reflectirten durch den Mittelpunkt der Pupille gehenden Strahl zusammenfällt, so gelten die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda' \cos 2\alpha + \mu' \sin 2\alpha \\
\mu &= -\lambda' \sin 2\alpha + \mu' \cos 2\alpha \\
\nu &= \nu' \\
x &= x' \cos 2\alpha + y' \sin 2\alpha \\
y &= -x' \sin 2\alpha + y' \cos 2\alpha \\
z &= z'
\end{aligned}$$

wo $\lambda' \mu' \nu'$, $x' y' z'$ sich auf das alte, $\lambda \mu \nu$, $x y z$ sich auf das neue Coordinatensystem beziehen. Die Richtungscosinus und Coordinaten des Austrittspunktes eines beliebig oft im Innern des Spiegels reflectirten und zweimal an der Vorderfläche gebrochenen Strahls sind also schliesslich:

$$(28)\quad \begin{cases} \lambda = -1 + \left[\frac{1}{2}(\mu_0^2 + \nu_0^2) - 2mw\frac{\cos f}{\cos\alpha}\mu_0\Theta - 2mw\sin f.\nu_0\Theta + 2m^2\left(\frac{\cos^2 f}{\cos^2\alpha} + \sin^2 f\right)w^2\Theta^2\right] \\ \mu_0 = \mu_0 - 2mw\frac{\cos f}{\cos\alpha}\Theta + \left[2m\frac{n^2-1}{w\cos\alpha}\operatorname{tg}\alpha.\cos f.\mu_0\Theta - 2m^2\operatorname{tg}\alpha\left(\left(\frac{\cos^2 f}{\cos^2\alpha} + \sin^2 f\right)w^2 - \cos^2 f\right)\Theta^2\right] \\ \nu = \nu' \end{cases}$$

$$(29)\qquad x_e = -x' \quad y_e = -x' \operatorname{ctg}\alpha \quad z_e = z'$$

Der Mittelpunkt der Pupille liegt auf der X-Axe des zuletzt eingeführten Coordinatensystems, seine Entfernung vom Coordinatenursprung, also seine X-Coordinate sei h, seine X- und Z-Coordinaten sind Null. Die Bedingung dafür, dass ein durch die Gleichungen (27) und (28) bestimmter Strahl durch diesen Punkt geht, ist:

$$(30)\qquad \frac{x_e - h}{\lambda} = \frac{y_e - o}{\mu} = \frac{z_e - o}{\nu}$$

Nachdem hier die Werthe von $\lambda\ \mu\ \nu$, $x_e\ y_e\ z_e$ eingesetzt sind, erhalten wir, indem alle höheren Potenzen und Producte von μ_0 und ν_0 wegfallen, zwei Gleichungen 1ten Grades in Bezug auf die Unbekannten μ_0 und ν_0. Bringen wir diese Gseichungen auf die Form:

$$\begin{aligned} a_1\mu_0 + b_1\nu_0 + c_1 &= 0 \\ a_2\mu_0 + b_2\nu_0 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

so ergeben sich:

$$(31)\qquad \mu_0 = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \quad \nu_0 = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}.$$

wo die Coefficienten $a_1\,b_1\,c_1$, $a_2\,b_2\,c_2$ folgende Werthe haben:

$$
(32)\quad
\begin{cases}
a_1 = -(h+l) + 2m\,\dfrac{w^2\sin^2\alpha - n^2\cos^2\alpha}{w^3}\,d + 2m\,\dfrac{n^2-1}{w\cos\alpha}\,tg\alpha\,.\cos f\,.\,(l-h)\Theta \\
b_1 = -2m\left(tg\alpha\,.h + \dfrac{\sin\alpha\,.\cos\alpha}{w}\sin f\,.l\right)\Theta \\
c_1 = 2m\left(w\,\dfrac{\cos f}{\cos\alpha}\,h\Theta + \dfrac{\sin\alpha\,.\cos\alpha}{w}\,d\right) \\
\quad + 2m^2\left[tg\alpha\left(\dfrac{\cos^2 f}{\cos^2\alpha}\,w^2 + w^2\sin^2 f - \cos^2 f\right)h\Theta - \cos f\,\dfrac{2w^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha(n^2+\sin^2\alpha)}{w^2\cos\alpha}\,d\right]\Theta \\
a_2 = 2m\left(w\,tg\,\alpha\,.\,l + \dfrac{\sin\alpha\,.\cos\alpha}{w}\,h\right)\sin f\,.\,\Theta \\
b_2 = -(h+l) - 2m\,\dfrac{\cos^2\alpha}{w}\,d \\
c_2 = 2m\,w\sin f\,.\,h\Theta + 2m^2\,(\cos 2\alpha\,.\,d - \sin f\,.\cos f\,.\sin\alpha\,.\,h\Theta)\,\Theta
\end{cases}
$$

Es ist also schliesslich:

$$
(33)\quad
\begin{cases}
\lambda_0 = 1 - \dfrac{1}{2}\,(\mu_0{}^2 + \nu_0{}^2) \\
\mu_0 = 2m\,A_1\,\Theta + 4m^2\,B_1\,\Theta^2 \\
\nu_0 = 2m\,A_2\,\Theta + 4m^2\,B_2\,\Theta^2
\end{cases}
$$

wo

$$
(33')\quad
\begin{cases}
A_1 = \dfrac{1}{h+l}\left(w\,\dfrac{\cos f}{\cos\alpha}\,h + \dfrac{\sin\alpha\,.\cos\alpha}{w}\,.\,\dfrac{d}{\Theta}\right) \\
A_2 = \dfrac{h}{h+l}\,w\sin f\,.\,l \\
B_1 = \dfrac{1}{h+l}\,tg\alpha\,.\,\dfrac{\cos^2 f}{\cos\alpha}\left(\dfrac{1}{2}\,w^2\,h + (n^2-1)\,\dfrac{l-h}{l+h}\,h\right) + \ldots. \\
B_2 = w^2\,\dfrac{tg\,\alpha}{\cos\alpha}\sin f\,.\cos f\,.\,\dfrac{hl}{(h+l)^2} + \ldots.
\end{cases}
$$

Die übrigen zu B_1 und B_2 gehörigen Glieder wollen wir im Interesse der Übersichtlichkeit unserer Formeln vernachlässigen. Wir dürfen dies, weil, wenn α sehr klein ist, die Glieder 2ter Ordnung überhaupt ohne Schaden für die näherungsweise Genauigkeit vernachlässigt werden können und bei einem grossen α, für welches die Glieder 2ter Ordnung entschieden in Betracht kommen, diejenigen, welche $\cos\alpha$ nicht im Nenner enthalten, gegen die oben geschriebenen Glieder sehr klein sind*). Somit sind λ_0 μ_0 ν_0 für ein beliebiges m als Funktionen der gegebenen Constanten der Lichtquelle, des Spiegels und des Auges gegeben.

V.

In Formel (22) des Abschnitts II. sind die Entfernungen der nach m-maliger Reflexion an der Hinterfläche des Spiegels entstehenden Brennpunkte vom Austrittspunkt

*) Es ist leicht, aus den in (32) gegebenen Grössen für bestimmte experimentelle Untersuchungen die fehlenden Glieder zu entwickeln.

des sie erzeugenden Strahlenbündels aus dem Spiegel gegebeu. Offenbar sind die in jenen Formeln enthaltenen $\lambda_0\,\mu_0\,\nu_0$ von den $\lambda_0\,\mu_0\,\nu_0$ des vorigen Abschnitts verschieden, da sie sich auf ein anderes Coordinatensystem beziehen. Wir wollen daher für $\lambda_0\,\mu_0\,\nu_0$ aus den Formeln des Abschnitts II. jetzt die Buchstaben $\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}$ einführen *), während für die $\lambda_0\,\mu_0\,\nu_0$ in der letzten Bedeutung die Bezeichnungen dieselben bleiben.

Es bestehen zwischen $\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}$ und $\lambda_0\,\mu_0\,\nu_0$ folgende Gleichungen:

$$(34)\qquad \begin{cases} \mathfrak{l} = \lambda_0 \cos + \mu_0 \sin\alpha \\ \mathfrak{m} = -\lambda_0 \sin\alpha + \mu_0 \cos\alpha \\ \mathfrak{n} = \nu_0 \end{cases}$$

Ferner ist:

$$x_0 = l\cos\alpha,\quad y_0 = -l\sin\alpha,\quad z_0 = 0$$

Setzt man diese Werthe in die Forneln (22) ein, so ergiebt sich:

$$(35)\qquad \begin{cases} r_1 = l - \left[tg\alpha . l\mu_0 + 4m\,\dfrac{n^2-1}{\cos^2\alpha}\,\dfrac{\sin\alpha\cos f}{w}\,l\Theta - 2m\,\dfrac{n^2\cos^2\alpha}{w^3}\,d \right] + \left[\dfrac{n^2-1}{w^2} + 6 \right] tg^2\alpha . l\mu_0{}^2 \\ r_2 = l - \left[tg\alpha . l\mu_0 - 2md \right] + \left[tg^2\alpha . \mu_0 - 2m\,\dfrac{\cos f}{\cos\alpha}\,\Theta \right] l\,\mu_0 \\ s = 4m^2\,\dfrac{(n^2-1)^2}{w^2}\,tg^2\alpha\sin^2 f . l\Theta^2 \end{cases}$$

Auch hier sind Glieder 2ter Ordnung vernachlässigt, die nicht 1te oder höherer Potenzen von $\cos\alpha$ im Nenner enthalten.

Um zunächst die Deutlichkeit der Bilder zu untersuchen, können einige von Kummer (l. c. pag. 222) entwickelte Formeln benutzt werden. Ist dq die Länge der unendlich kleinen geraden Linien, welche die Durchschnittspunkte unendlich naher Strahlen in den Brennpunkten bilden, $2d$ die Entfernung der Brennpunkte (die hier mit den »Grenzpunkten kürzester Abstände« zusammenfallen) von einander, dq_0 der Radius des Kreises, welcher den Querschnitt des Strahlenbündels in einem bestimmten Punkte begrenzt, so ist für den ersten Brennpunkt:

$$dq = \frac{2d}{\varrho_2}\,dq_0\,,$$

für den zweiten Brennpunkt:

$$dq = -\frac{2d}{\varrho_1}\,dq_0$$ **)

Hier ist nun dq_0 der Radius derPupille, ferner:

$$2d = \varrho_2 - \varrho_1 = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 2(r_1 + r_2)s + s^2}\,,$$

also klein von der 1ten Ordnung, wenn Winkel α nicht nahezu 90^0 beträgt. Da die drei Summanden unter der Quadratwurzel wesentlich positiv sind, so kann $2d$ nur $= 0$ sein,

*) Der Grund für diese Licenz besteht darin, dass die Arbeit nicht zusehr mit Buchstaben überladen werden sollte.

**) In diesen Formeln sind bei der Anwendung auf unser Problem für ϱ_1 und ϱ_2 die Werthe $l+\varrho_1$ resp. $l+\varrho_2$ zu setzen weil, der als Ausgangspunkt bezeichnete Punkt das Centrum der Pupille ist.

wenn $c = 0$ und $r_1 = r_2$ ist. Nach (35) ist $s = 0$, wenn $f = 0$ oder $f = 180^0$ ist d. h. wenn der leuchtende Punkt und der Mittelpunkt der Pupille in einer auf der Spiegelaxe senkrechten Ebene liegen. Weiter ist $r_1 = r_2$ für einen sehr kleinen Winkel α, da für $\alpha = 0$ der Unterschied zwischen r_1 und r_2 nur eine kleine Grösse der 2ten Ordnung beträgt. Wir dürfen also sagen: Die Deutlichkeit der mehrfachen Bilder ist am grössten bei senkrechtem Sehen auf den Spiegel; sie nimmt ab mit zunehmendem Einfallswirkel α des das erste Bild liefernden Strahlenbündels. Genaue Schärfe der Bilder wird nur erreicht, wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind. Es ist leicht einzusehen, dass dieses Resultat mit dem von Helmholtz im Handbuch der physiologischen Optik nachgewiesenen Satze übereinstimmt, dass ein von einem leuchtenden Punkte ausgehendes unendlich dünnes Strahlenbündel nach der Brechung durch ein Prisma nur dann homocentrisch bleibt, wenn die Ablenkung ein Minimum ist. Betrachtet man die Differenz $\varrho_2 - \varrho_1$ bei einem festgesetzten α und variablem f, so zeigt sich, dass bei einer Drehung des Spiegels um eine Normale auf die Vorderfläche die Deutlichkeit der Bilder ähnlich wächst und abnimmt, wie die Helligkeit des Gesichtfeldes im Polarisationsapparat bei einer Drehung des Nicols.

Über die Entfernungen der mehrfachen Bilder vom Auge wird sich schon deshalb wenig bestimmtes aussagen lassen, weil zwei Punkte darauf Anspruch haben, vom Beobachter als Bilder der Lichtquelle angesehen zu werden und die Dichtigkeit des Strahlenbündels in dem einen Punkte im Allgemeinen nicht von höherer Ordnung unendlich gross als im andern Punkte ist. Übrigens ist diese Frage auch von geringer Wichtigkeit wegen der Unmöglichkeit, die hier auftretenden kleinen Entfernungsunterschiede genau zu schätzen, zumal da Intensitäts- und Deutlichkeitsunterschiede hinderlich sind.

Die Entfernung der Brennpunkte vom Auge ist:

$$(x_e - h)\lambda + y_e\mu + \varrho = h + \varrho + l\,tg\,\alpha\,.\,\mu_0 + \ldots\ldots,$$

wo für ϱ nach einander ϱ_1 und ϱ_2 einzusetzen sind. Man erhält, wenn man dies ausführt, den Ausdruck

$$h + l + 2m\frac{n^2-1}{\cos^2\alpha}\frac{\sin\alpha\cos f}{w}l\Theta - m\frac{n^2\cos^2\alpha + w^2}{w^3}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{(r_1-r_2)^2 + 2(r_1+r_2)s + s^2} + \ldots$$

Hiernach wäre es möglich, bestimmt anzugeben, ob die durch mehrfache Reflexion entstehenden Bilder vor oder hinter dem durch nur einmalige Reflexion erhaltenen liegen. Der erste Fall wird eintreten, wenn der zu $h + l$ addirte Ausdruck bei positiv genommener Quadratwurzel negativ ist, der zweite Fall dagegen, wenn derselbe bei negativ genommener Quadratwurzel positiv ist.

VI.

Dem Experimente wie der Rechnung weit zugänglicher als das Vorhergehende sind die seitlichen Verschiebungen der mehrfachen Bilder, deren Untersuchung wir im Folgenden vorzunehmen haben. Es sei zu diesem Zwecke durch das erste Bild eine

Ebene gelegt, welche senkrecht auf dem von diesem Bildpunkte in den Mittelpunkt der Pupille gelangenden Strahle, also senkrecht auf der X-Axe steht. Ihre Gleichung ist demnach

$$\xi + l = 0$$

Jeder von einem Bildpunkte nach dem Centrum der Pupille gehende Strahl schneidet diese Ebene in einem Punkte, der mithin die Polarprojection des betreffenden Bildpunktes auf die Ebene $\xi+l=0$ in Bezug auf das Centrum der Pupille als Pol ist. Die Entfernung einer solchen Projection vom ersten Bilde, dividirt durch $h+l$, giebt die trigonometrische Tangente der scheinbaren Grösse der seitlichen Verrückung, welche experimentell leicht zu bestimmen ist. Es ist also nur nöthig, die Coordinaten η und ζ der Bildprojectionen zu untersuchen.

Die Bedingungen dafür, dass ein Strahl durch einen Punkt $\xi = -l$, η, ζ und durch das Centrum der Pupille gehe, sind:

$$-\frac{h+l}{\lambda} = \frac{\eta}{\mu} = \frac{\zeta}{\nu}$$

oder

$$\eta = -\frac{\mu}{\lambda}(h+l), \quad \zeta = -\frac{\nu}{\lambda}(h+l),$$

Gleichungen, die mit Rücksicht auf (28) und (33) übergehen in:

$$(37)\begin{cases} \eta = 2m\left[-w\dfrac{\cos f}{\cos\alpha}\,l\Theta + \dfrac{\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{w}\,d\right] + \\ + 2m^2\left[(n^2-1)\dfrac{\cos^2 f}{\cos^2\alpha}\dfrac{3h-l}{h+l}\,\Theta + 2w\sin f\left(\dfrac{h}{h+l} - \dfrac{1}{2}\,w\sin f\right)\Theta + 4\,\dfrac{n^2-1}{w^2}\cos f\,\dfrac{d}{h+l}\right] tg\alpha\,.\,l\Theta \\ \zeta = -2m\sin f\,l\Theta + 4m^2 w^2 \sin f\cos f\,\dfrac{tg\,\alpha}{\cos\alpha}\,\dfrac{h}{h+l}\,l\Theta^2 \end{cases}$$

Um einen allgemeinen möglichst einfachen Uberblick über die Erscheinungen zu gewinnen, wollen wir zunächst nur die kleinen Glieder 1ter Ordnung berücksichtigen und dann erst die Veränderungen betrachten, welche die Glieder 2ter Ordnung an den erlangten Resultaten hervorbringen. Wir setzen

$$(37^a)\qquad \begin{cases} \eta = 2m\left[-w\dfrac{\cos f}{\cos\alpha}\,l\Theta + \dfrac{\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{w}\,d\right] \\ \zeta = -2m\,w\sin f\,l\Theta \end{cases}$$

woraus sich durch Elimination von m ergiebt:

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{\zeta}{\eta} = \dfrac{w\sin f\,l\Theta}{w\dfrac{\cos f}{\cos\alpha}\,l\Theta - \dfrac{\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{w}} \end{cases}$$

Sämmtliche Bildprojection liegen in erster Annäherung auf einer Geraden, die durch das erste Bild geht und sich um dasselbe dreht, wenn der Spiegel um eine Normale auf seine Vorderfläche gedreht wird, d. h. wenn Winkel f von 0 bis 360° variirt.

Ebenso ist mit einer Veränderung des Winkels α, unter welchem man nach dem Spiegel sieht, eine Drehung der Bildprojectionen verbunden.

Eliminiren wir aus den Formeln (37[a]) den Winkel f, so erhalten wir die Gleichung:

$$(39) \qquad \frac{\left(\eta - 2m\frac{\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{w}\,d\right)^2}{\left(2m\frac{w}{\cos\alpha}\,l\Theta\right)^2} + \frac{\zeta^2}{(2m\,w\,l\Theta)^2} = 1,$$

d. h. jedes der mehrfachen Bilder beschreibt, wenn der Spiegel um das Einfallsloth des nur an der Vorderfläche reflectirten Strahls gedreht wird, eine Curve, deren Polarprojection auf die Ebene $\xi + l = 0$ annähernd eine Ellipse ist. Der Mittelpunkt einer solchen Ellipse hat die Coordinaten:

$$\eta = 2m\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{w}\,d, \quad \zeta = 0,$$

die Länge der halben grossen Axe ist $2m\frac{w}{\cos\alpha}\,l\Theta$, die Länge der halben kleinen Axe $2m\,w\,l\Theta$. Die Mittelpunkte von je zwei aufeinander folgenden Ellipsen sind um die Strecke $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{w}\,d$ von einander entfernt.

Zur Orientirung über die Lage der Ellipsen gegen Spiegel, Auge und leuchtendes Object sei bemerkt, dass die Y-Axe des Coordinatensystems in der durch den leuchtenden Punkt und den Mittelpunkt der Pupille gehenden, auf der Spiegelvorderfläche senkrechten Ebene liegt, dass sie im Punkt O der Vorderfläche auf dem nach einmaliger Reflexion in den Mittelpunkt der Pupille gelangenden Strahl, der X-Axe, senkrecht steht und dass sie positiv auf der Seite der X-Axe ist, welche von O an ganz hinter der Spiegelvorderfläche liegt. Für $f = 0$ fällt die Neigungsebene des Winkels Θ mit der XY-Ebene zusammen und die Spitze dieses Winkels liegt im dritten Quadraten des XY-Coordinatensystems. Die Richtungsconstante eines beliebigen Radiusvectors der Ellipse ist:

$$tg\,\varphi = \frac{\zeta}{\eta - 2m\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{w}\,d} = tgf\,.\,\cos\alpha$$

Der Winkel φ, welchen ein Radiusvector mit der Y-Axe einschliesst, wächst demnach mit wachsendem f, d. h. der Drehungsinn der Bilder — so wollen wir von jetzt an kurzweg die Bildprojectionen nennen — und der Drehungssinn des Spiegels sind ein und derselbe. Ist $\alpha = 0$, so sind die Winkelgeschwindigkeiten beider Drehungen einander gleich, und die Ellipsen gehen in concentrische Kreise mit den Radien $2mnl\Theta$ über.

Die durch Gleichung (38) gegebene Gerade wird bei einer vollen Drehung des Spiegels nur dann eine volle Drehung um das erste Bild machen, wenn

$$\frac{w}{\cos\alpha}\,l\Theta > \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{w}\,d$$

ist, denn nur dann können die mehrfachen Bilder auf die negative Seite der Y-Axe

gelangen. Diese Bedingung ist beim Experiment leicht zu erfüllen dadurch, dass die Entfernung des leuchtenden Punkts vom Spiegel sehr gross gemacht wird.

Ist dagegen

$$\frac{w}{\cos\alpha} l\Theta < \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{w} d,$$

so bleiben die mehrfachen Bilder stets auf der positiven Seite der Y-Axe.

Die Abstände je zweier auf einander folgender Bilder sind in erster Annäherung unabhängig von der Anzahl von Reflexionen, durch welche diese Bilder entstanden sind, bei constantem f also einander gleich, welchen Werth man m auch annehmen lässt. Die Abstände werden am grössten für $f = 180^0$ und haben dann den Werth

$$\frac{w}{\cos\alpha} l\Theta + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{w} d$$

Ein Minimum der Abstände wird erreicht, wenn

$$\cos f = \frac{\cos^2\alpha}{w^2 \sin\alpha} \cdot \frac{d}{l\Theta}$$

ist. Durch gehörige Vergrösserung von l (z. B. wenn man als Object die Sonne nimmt) kann f beliebig 90^0 oder 270^0 genähert werden. Ein Maximum oder Minimum entspricht dem Winkel $f = 0$, je nachdem

$$w^2 \frac{tg\,\alpha}{\cos\alpha} l\Theta \gtrless d$$

ist. Bei grossem l nehmen also die Abstände abwechselnd ab und zu, während f von Null bis 90^0, von 90^0bis 180^0, von 180^0 bis 270^0 und von 270^0 bis 360^0 wächst.

Die bisherigen Ergebnisse werden um so mehr durch die Glieder zweiter Ordnung modificirt, je grösser α ist, und man sieht aus den Formeln (37), dass dann für die Lage der Bilder auch die Entfernung h des Auges vom Spiegel in Betracht konnt. Durch Elimination von m aus den Gleichungen (37) ergiebt sich eine Gleichung 2ten Grades für η und ξ, die, wie schon die Form der Eliminationsgleichungen zeigt, eine Parabel darstellt. Sämmtliche mehrfachen Bilder liegen also auf einer Parabel, welche sich verändert und um das erste Bild dreht, wenn der Spiegel um die Normale auf die Vorderfläche gedreht oder wenn bei constanten f der Winkel α verändert wird. Die Parabel geht nur für $f = 0$ und $f = 180^0$in die Y-Axe über.

Um die Curven, auf denen sich die Bilder bei einer Drehung des Spiegels um seine Normale bewegen, mit den durch die Gleichung (39) gegebenen Ellipsen zu vergleichen, sind drei Fälle zu betrachten:

1) $l > 3h$

Die von einem bestimmten Bilde durchlaufene ellipsenähnliche Curve ist gegen die in erster Annäherung erhaltene Ellipse in Richtung der negativen η etwas verschoben und schneidet dieselbe nahe den Endpunkten der kleinen Axe.

2) $l = 3h$

Die Curve liegt ganz innerhalb der Ellipse und schmiegt sich ihr sehr nahe an.

3) $l < 3h$

Die Curve ist gegen die Ellipse in Richtung der positiven η etwas verschoben.

Man überzeugt sich von dem Gesagten leicht, indem man in den Formeln (37) dem Winkel f nacheinander die Werthe 0, 90°, 180°, 270° ertheilt.

Da die Abweichungen von der Ellipse von den Gliedern der 2ten Ordnung, die den Faktor m^2 enthalten, abhängig sind, so sind sie um so grösser, je grösser m ist, woraus sich einige Schlüsse über die Entfernungen der Bilder von einander ziehen lassen. Ist nämlich $l > 3h$, so werden in derjenigen Stellung des Spiegels, in welcher $f = 0$ ist, je zwei auf einander folgende Bilder um so näher einander rücken, je grösser die Zahl m der Reflexionen ist, welche die sie erzeugenden Strahlen an der Hinterfläche des Spiegels erleiden. Umgekehrt liegen diese Bilder einander um so entfernter, je grösser m ist, wenn der Spiegel die durch $f = 180°$ gegebene Stellung animmt. Genau das Umgekehrte tritt ein, wenn $l < 3h$ ist. Die Erörterung des Grenzfalls $l = 3h$ wollen wir unterlassen, da hier die nicht entwickelten weiteren Glieder wesentlich von Einfluss sein können.

Durch das Vorhergehende ist es möglich, ohne Hilfe von Instrumenten zu bestimmen, nach welcher Seite die Ebenen einer anscheinend planparallelen Glasplatte convergiren. Man halte die Platte so vor das Auge, dass die mehrfachen Bilder eines entfernten leuchtenden Gegenstandes zum Vorschein kommen und in der durch den einen Rand des Gegenstandes und das Auge senkrecht gegen die Platte gedachten Ebene liegen. Liegt dann die Reihe der durch mehrfache Reflexion entstandenen Bilder näher an der Platte als das erste, so convergiren ihre Begrenzungsflächen in der Richtung des Sehens oder in der Richtung nach dem Object hin. Die Convergenzrichtung geht auf den Beobachter zu, wenn die Reihe der mehrfachen Bilder, von dem durch einmalige Reflexion entstehenden aus gerechnet, sich von der Platte entfernt. Es ist nöthig, beide Beobachtungen auszuführen resp. die Platte um ihre Normale zu drehen, weil auch mehrfache Bilder auftreten, wenn sie vollkommen parallelflächig ist. Diese Bilder behalten dann aber ihre Lage, wie man auch die Platte um eine Normale auf die Vorderfläche dreht. Es wird nämlich, wenn $\Theta = 0$ ist:

$$\eta = m\frac{\sin 2\alpha}{w}d\,, \quad \zeta = 0 \tag{40}$$

Die Reihe der mehrfachen Bilder, von dem durch einmalige Reflexionen entstandenen an gerechnet, entfernt sich also von der Vorderfläche.

Die Entfernungen je zweier auf einander folgender Bilder sind einander gleich, und ihre Grösse ist $\frac{\sin 2\alpha}{w}d$. Setzt man $n = \frac{3}{2}$, so erreicht dieser Ausdruck ein Maximum für $\alpha = 49°\ 12{,}5'$. Für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90°$ wird $\eta = 0$ d. h. bei senkrechtem und streifendem Sehen nach dem Spiegel sieht man nur ein Bild, da alle andern hinter das erste fallen.

Setzt man in den Gleichnngen (37) $l = 0$, so gehen sie in die Gleichungen (40) über; die auftretenden Erscheinungen sind genau dieselben wie bei planparallelen Spiegeln, wenn der leuchtende Punkt in der Spiegelfläche liegt.

Die Formeln des letzten Abschnitts werden illusorisch, sobald die Reihenentwickelung von W in Abschnitt II, (13) nach Potenzen von Θ unmöglich ist. Nun ist

$$W = W_1 = \sqrt{1 - n^2 + \{(\mathfrak{m}\, cosf + \mathfrak{n}\, sinf)\, sin\, 2m\Theta + w\, cos\, 2m\Theta\}^2}$$
$$= \sqrt{l^2 + 2(\mathfrak{m}\, cosf + \mathfrak{n}\, sinf)\, w\, 2m\Theta + \ldots \text{ (höhere Potenz.)}}$$

Die Reihenentwicklung ist also nicht durchführbar, wenn l klein von der $\frac{1^{ten}}{2}$ der einer höheren Ordnung ist. Es sei v eine endliche Zahl und $l^2 = m\, v\, \Theta$, so ist:

$$W = \sqrt{2m\Theta}\ \sqrt{v + 2(\mathfrak{m}\, cosf + \mathfrak{n}\, sinf)\, w + (\ldots)\, 2m\Theta + \ldots}$$

Wenn nun das Coordinatensystem so liegt, dass die XY-Ebene mit der durch das Object und das Auge senkrecht zur Spiegelvorderfläche gelegten Ebene zusammenfällt, so st $\mathfrak{n}$ sehr klein und also, weil $\mathfrak{m}^2 = 1 - l^2 - \mathfrak{n}^2$, $\mathfrak{m}$ nahezu $= 1$. Daraus sieht man, dass, wenn f zwischen 90° und 270° liegt, von einem bestimmten Werthe von v an W imaginär wird; und zwar ist dies um so eher der Fall, je grösser m ist. Es ergiebt sich daraus der Satz:

Sieht man die mehrfachen Bilder eines Gegenstandes in der Richtung der convergirenden Spiegelflächen, so lässt sich durch Verkleinern des Winkels zwischen der Richtung des Sehens und dem Spiegel bewirken, dass allmählich die mehrfachen Bilder verschwinden. Es verschwindet stets dasjenige Bild zuerst, welches durch die grösste Zahl von Reflexionen entsteht. Dreht man dann den Spiegel um eine Normale auf die Vorderfläche, so kommen die Bilder in umgekehrter Reihenfolge wieder zum Vorschein, bis der Drehungswinkel die Grösse 180° erreicht.

VII.

Die vorstehenden Resultate können leicht mit Hilfe eines Theodolithen geprüft werden. Man beobachtet durch das Fernrohr desselben die Bilder eines leuchtenden Punktes in der Weise, dass man jedesmal das Fadenkreuz mit einem Bilde in Deckung bringt und die Winkel zwischen den verschiedenen Stellungen abliest. Da nun die Sehrichtungen stets durch die Mitte des Fernrohrs gehen, so ist es klar, dass der Drehpunkt desselben genau die Rolle spielt wie der vorher »Mittelpunkt der Pupille« genannte Punkt. Alle Einzelheiten des Versuchs ergeben sich von selbst. Leider fehlte es mir an einer passenden Glasplatte, weshalb ich das Experiment nicht ausführen konnte; doch stimmten die an einem gläsernen Massstab und anscheinend planparallelen Brillengläsern beobachteten Erscheinungen mit den gewonnenen Resultaten vollkommen überein.

Es mag noch erwähnt werden, dass die in erster Annäherung geltenden Formeln (37ª) sofort aus den Gteichungen (32) in der öfter erwähnten Arbeit von Feussner hergeleitet werden können. Darnach ist nämlich

$$\mathfrak{x}_1 = a$$
$$\mathfrak{y}_1 = -F\eta_2 - G\eta + hH$$
$$\mathfrak{z}_1 = -F\zeta_2 - G\zeta + hI,$$

worin zur Abkürzung

$$H = \frac{sin2\alpha}{w} d + \frac{2 w a \cos\varphi}{\cos\alpha} \Theta$$

$$I = 2 w a \sin\varphi \Theta \quad \text{gesetzt ist.}$$

Aus der Betrachtung der im Anfang gemachten Voraussetzungen ergiebt sich nun, dass hier $m = h$, $\varphi = f$, $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{z}_1 = 0$, $a = l$ ist und dass man α_1, η_1, ζ_1, η_2, ζ_2, die entgegengesetzten Vorzeichen zu geben hat. Demnach wird:

$$\eta = -\frac{1}{G}(F\eta_2 + mH)$$

$$\zeta = -\frac{1}{G}(F\zeta_2 + m I),$$

worin

$$H = -\frac{sin2\alpha}{w} d + \frac{2 w \cos f}{\cos\alpha} l\Theta$$

$$I = 2 w \sin f \,.\, l\Theta \quad \text{ist.}$$

F und G hängen von den Constanten einer Linse ab, welche einen durch den Punkt $\eta_1\zeta_1$ eines Diaphragmas gegangenen Strahl in den Punkt $\eta\zeta$ eines dahinter befindlichen Schirmes gehen lässt. Sollen nun sämmtliche Strahlen sich auf dem Schirme in einem Punkte vereinigen, so müssen η und ζ für alle beliebigen $\eta_2\zeta_2$ denselben Werth behalten. Dies geschieht, wenn $F = 0$ ist. Die Coordinaten der Bildpunkte sind dann

$$\eta = -m\frac{H}{G}, \quad \zeta = -m\frac{I}{G}$$

Genau dieselben Punkte erhält man aber, wenn man durch eine Convexlinse, deren Constanten dieselben wie in der Arbeit von Feussner sind, die Bilder der durch (37ª) der vorliegenden Arbeit gegebenen Punkte auf dem Schirme entwerfen lässt. Beide Resultate sind also identisch.

Wenn man die Feussner'schen Gleichungen (32) noch durch die kleinen Glieder 2ter Ordnung ergänzt, so erhält man in der Gleichung für $\mathfrak{y}_1$ Summanden mit den Faktoren η_2^2, $\eta\eta_2$, η^2, η, ζ_2, ζ, in der Gleichung für $\mathfrak{z}_1$ Summanden mit den Faktoren η_2, η, $\eta\zeta_2$, $\zeta\eta_2$, ζ_2^2, ζ^2, ζ_2, ζ. Sollen sich nun Strahlen, die durch verschiedene Punkte des Diaphragmas gegangen sind, auf dem Schirme vereinigen, so müssen η und ζ von η_2 und ζ_2 unabhängig sein. Setzen wir für die obigen Gleichungen einstweilen:

$$\psi_1(\eta_2\zeta_2) = 0, \quad \psi_2(\eta_2\zeta_2) = 0$$

so sind Bedingungen dafür, dass alle Glieder, welche η_2 und ζ_2 enthalten, verschwinden:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta_2} = \frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta_2} = \frac{\partial\psi_2}{\partial\eta_2} = \frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta_2} = 0$$

Die Gleichung $\frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta_2} = 0$ enthält keine der Grössen $\eta\ \eta_2\ \zeta\ \zeta_2$ und bestimmt die Lage des Schirmes für bestimmte Werthe von F, α, f, l etc. Die drei andern Gleichungen sind linear in Beziehung auf η, η_2, ζ, ζ_2, und durch Elimination von η und ζ ergiebt sich aus ihnen, dass die Strahlen, die sich auf dem Schirme schneiden, die Ebene des

Diaphragmas in einer Geraden schneiden. Die Coordinaten η und ζ des Bildpunktes ergeben sich aus den nun η_2 und ζ_2 nicht mehr enthaltenden Gleichungen $\psi_1 = 0$ und $\psi_2 = 0$. Man wird aber genau dieselben Gleichungen für η und ζ erhalten, wenn man direkt η_2 und $\zeta_2 = 0$ setzt, und somit geht auch der Strahl, welcher den Mittelpunkt des Diaphragmas auf seinem Wege trifft, durch den Bildpunkt auf dem Schirm.

Dieser Mittelpunct des Diaphragmas spielt hier also dieselbe Rolle wie der «Mittelpunkt der Pupille,« so dass die Formeln, welche wir oben erhalten haben, auch dann zu demselben Resultate führen, wenn sie auf die von Feussner bewerkstelligte Anordnung des Experiments angewandt werden. Zwar bezieht sich dieses Experiment eigentlich auf Interferenzerscheinungen, doch ist klar, dass es ebenso gut auch zur Darstellung mehrfacher Bilder dienen kann.

Curriculum vitae.

Am 30. Juni 1862 wurde ich Eugen Höhnemann als Sohn des Telegraphenbeamten Louis Höhnemann zu Berlin geboren. Nach dem frühzeitigen Tode meines Vaters wählte meine Mutter die Stadt Lübben i. d. Lausitz als Wohnort, woselbst ich bis zum Jahre 1878 die Realschule zweiter Ordnung, später höhere Bürgerschule, besuchte. Darauf gehörte ich der Prima der Oberschule (Realschule erster Ordnung) zu Frankfurt a. O. an, die ich nach bestandenem Maturitäts-Examen Michaeli 1880 verliess, um zunächst in Berlin Mathematik zu studiren. Nachdem ich dort drei Semester meiner Studienzeit verlebt hatte, bezog ich die Universität Marburg.

Meine Lehrer waren in Berlin die Herren: Bruns, Helmholtz, Kummer, Müller, Paulsen, Wangerin, Zeller, in Marburg die Herren: Bergmann, Cohen, Drach, Dunker, Feussner, Greeff, Hess, Klocke, Melde, Rein, Stegmann, Wigand. Ihnen allen fühle ich mich zu grossem Dank verpflichtet.

Ich kann nicht umhin, an dieser Stelle Herrn Prof. Feussner meinen besonderen Dank dafür auszusprechen, dass er mich nicht nur in den von ihm angesetzten Uebungsstunden, sondern auch privatim bei meinen Arbeiten stets in freundlichster Weise mit Rath und That unterstützt hat. Von ihm ist auch die Anregung zu vorliegender Arbeit ausgegangen.